

#2. 다양한 경우의 수 세기

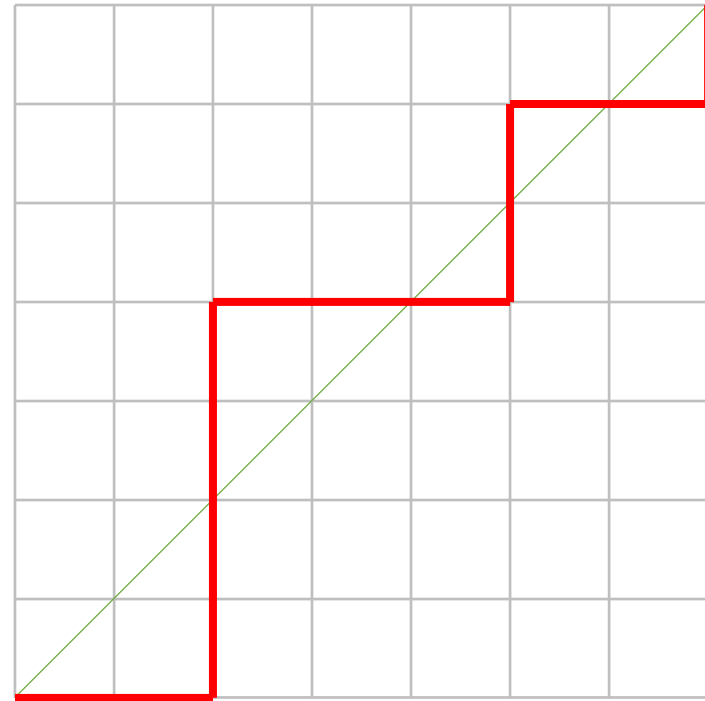
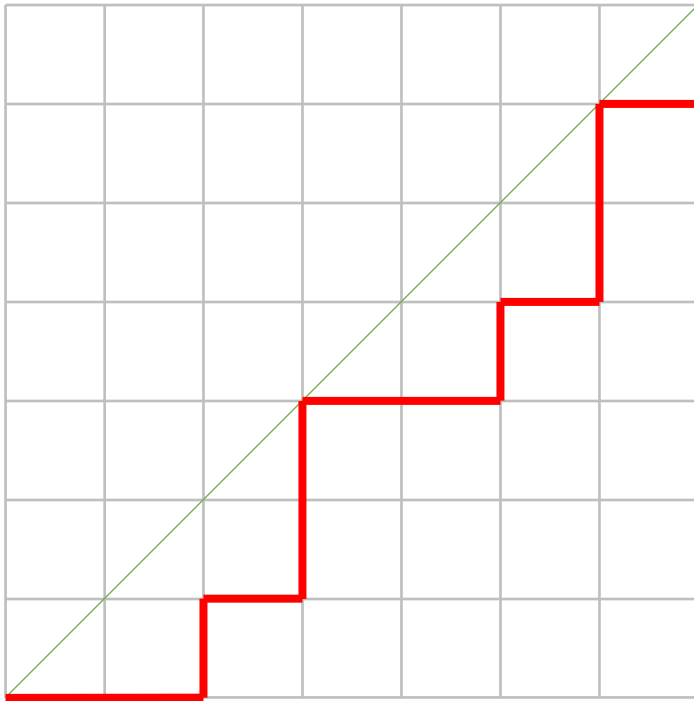
나정휘

<https://justicehui.github.io/>

카탈란 수

카탈란 수

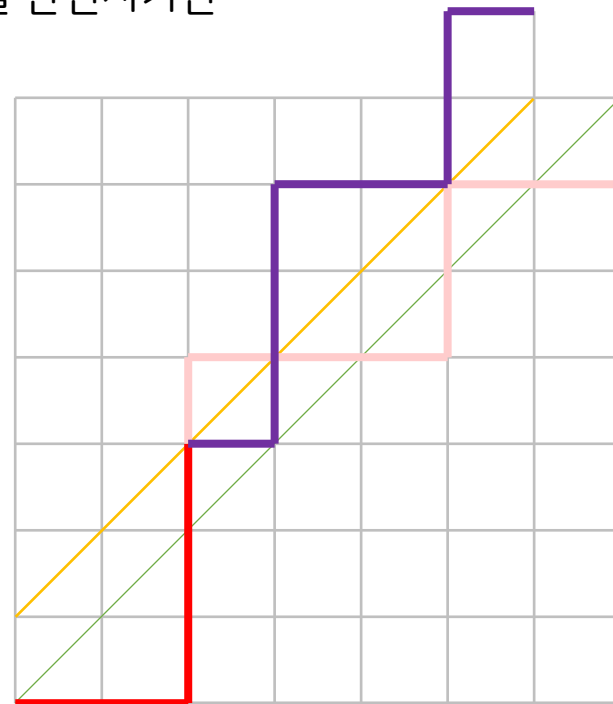
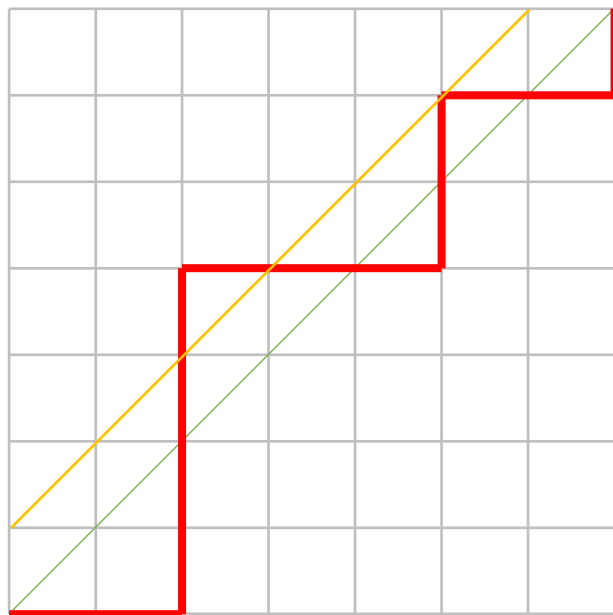
- $n \times n$ 격자에서 $(0,0)$ 에서 (n,n) 으로 이동할 때, 주대각선을 넘어가지 않는 경로(Dyck path)의 개수
- 가능한 모든 경로의 개수에서 주대각선을 넘는 경로의 개수를 빼면 됨



카탈란 수

카탈란 수

- $n \times n$ 격자에서 $(0,0)$ 에서 (n,n) 으로 이동할 때, 주대각선을 넘어가지 않는 경로(Dyck path)의 개수
- 가능한 모든 경로의 개수에서 주대각선을 넘는 경로의 개수를 빼면 됨
- 주대각선을 넘는 경로의 개수
 - $y = x$ 직선을 뚫고 올라가는 경로는 항상 $y = x + 1$ 직선 위의 점을 한 번 이상 지남
 - 처음으로 $y = x + 1$ 과 만나는 점 이후의 모든 이동을 반전시키면
 - $y = x$ 을 뚫는 경로는 모두 $(n-1, n+1)$ 에 도착함



카탈란 수

카탈란 수

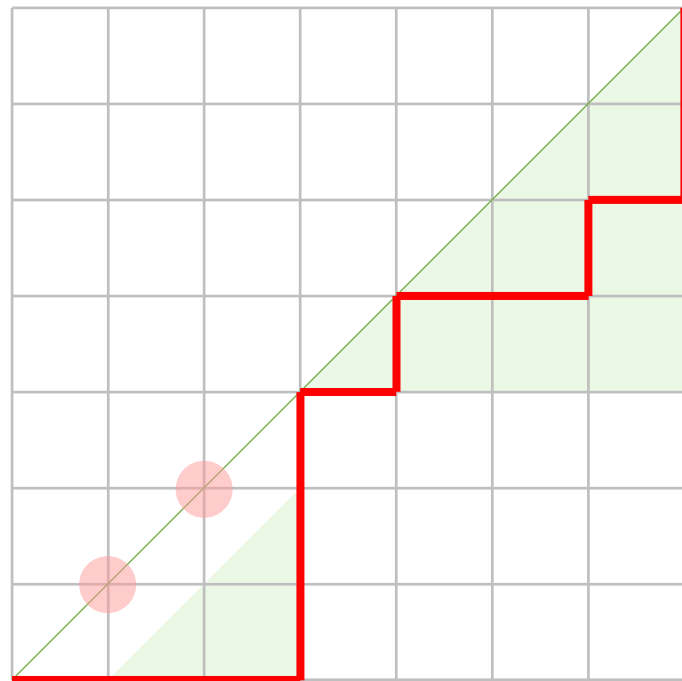
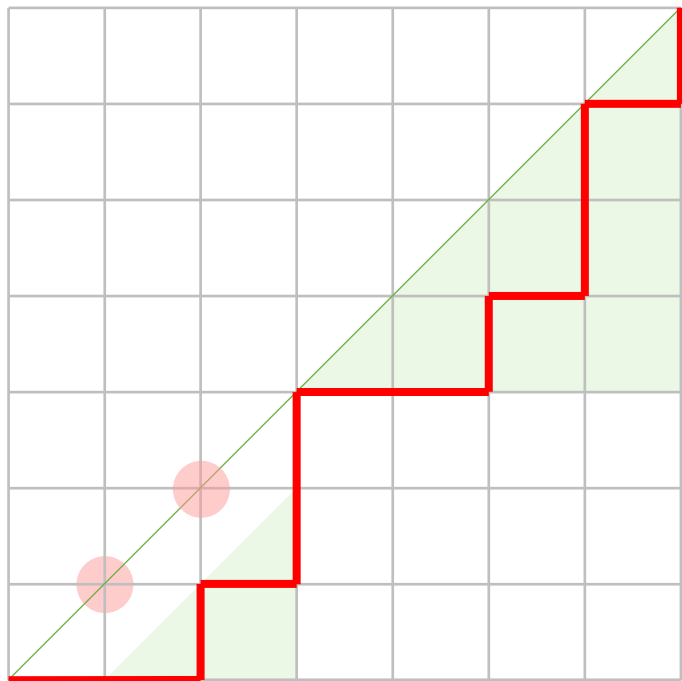
- $n \times n$ 격자에서 $(0,0)$ 에서 (n,n) 으로 이동할 때, 주대각선을 넘어가지 않는 경로(Dyck path)의 개수
- 가능한 모든 경로의 개수에서 주대각선을 넘는 경로의 개수를 빼면 됨
- 주대각선을 넘는 경로의 개수
 - $y = x$ 직선을 뚫고 올라가는 경로는 항상 $y = x + 1$ 직선 위의 점을 한 번 이상 지남
 - 처음으로 $y = x + 1$ 과 만나는 점 이후의 모든 이동을 반전시키면
 - $y = x$ 을 뚫는 경로는 모두 $(n - 1, n + 1)$ 에 도착함
- 주대각선을 넘지 않는 경로의 개수
 - $y = x$ 를 뚫는 모든 경로는 $(0,0)$ 에서 $(n - 1, n + 1)$ 로 가는 경로와 일대일 대응시킬 수 있음
 - 따라서 주대각선을 넘지 않는 경로의 개수는 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$
 - 이때 $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}$ 이므로 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$

카탈란 수

카탈란 수

- 원점을 제외하고 처음으로 $y = x$ 직선과 만나는 점 (k, k) 를 생각해 보자.
 - $y = x$ 를 지나지 않고 $(0,0)$ 에서 (k,k) 로 가는 경로의 수: C_{k-1}
 - (k,k) 에서 (n,n) 으로 가는 경로의 수: C_{n-k}
 - 따라서 $C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$

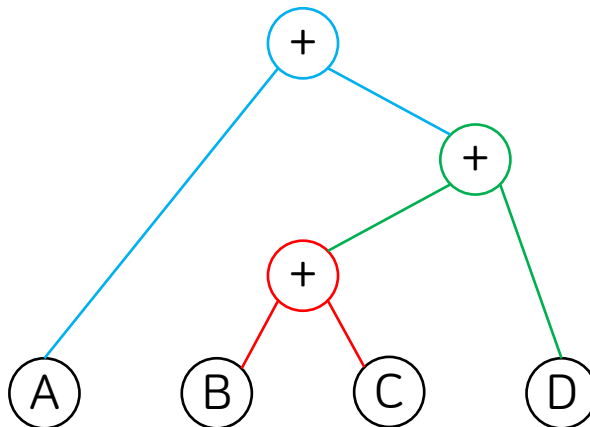
- $n = 7, k = 3$



카탈란 수

카탈란 수

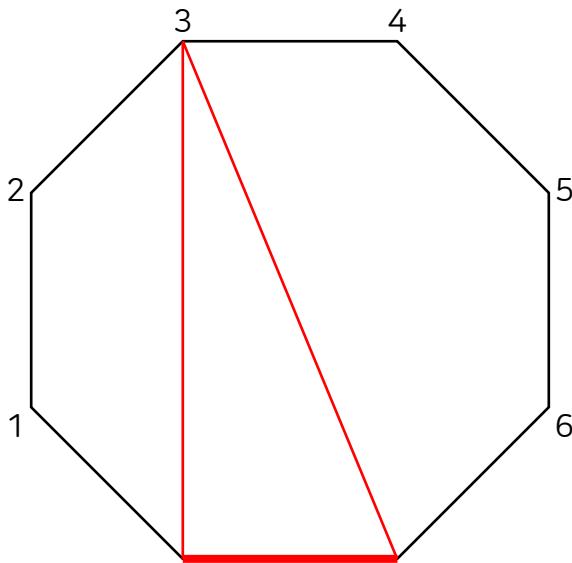
- n 개의 여는 괄호와 n 개의 닫는 괄호를 이용해 만들 수 있는 올바른 괄호 문자열의 개수
 - 여는 괄호와 닫는 괄호를 각각 오른쪽 이동과 위쪽 이동에 대응하면 dync path의 개수를 세는 문제가 됨
 - 따라서 C_n
 - 리프 정점이 $n + 1$ 개이고, 모든 정점의 자식이 0개 또는 2개인 full binary tree의 개수
 - 수식 트리로 생각하면, $n + 1$ 개의 항이 있는 수식에 n 쌍의 괄호를 씌워 이항 연산자를 적용한다고 생각할 수 있음
 - n 쌍의 괄호를 이용해 올바른 괄호 문자열을 만드는 방법의 수 $\rightarrow C_n$
- $n = 3$
- $(A + ((B + C) + D))$



카탈란 수

카탈란 수

- 볼록 $n + 2$ 각형에 $n - 1$ 개의 대각선을 그려서 n 개의 삼각형으로 분할하는 방법의 수
 - 다각형의 한 변을 고정하자.
 - 그 변을 밑변으로 하는 삼각형을 만들기 위해 꼭짓점을 선택해야 함
 - n 개의 꼭짓점 후보 중 k 번째 점을 선택하면, 볼록 $n + 2$ 각형은 다음과 같이 세 조각으로 분할됨
 - 삼각형
 - 후보가 $k - 1$ 개인 볼록 $k + 1$ 각형
 - 후보가 $n - k$ 개인 볼록 $n - k + 2$ 각형
 - 따라서 카탈란 수의 점화식과 동일한 $C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ 을 얻을 수 있음
- $n = 6, k = 3$
 - 삼각형
 - 후보가 2개인 사각형
 - 후보가 3개인 오각형



집합의 분할

제2종 스털링 수

- n 개의 원소를 k 개의 집합으로 분할하는 경우의 수
 - 각 집합은 공집합이 아니고, 각 원소는 정확히 한 집합에 들어가야 함
- $n = 3, k = 2$
 - $\{1,2\} \cup \{3\}$
 - $\{2,3\} \cup \{1\}$
 - $\{3,1\} \cup \{2\}$
 - 따라서 $S_2(3,2) = 3$

집합의 분할

제2종 스털링 수

- n 개의 원소를 k 개의 집합으로 분할하는 경우의 수
 - 각 집합은 공집합이 아니고, 각 원소는 정확히 한 집합에 들어가야 함
- n 개의 원소를 k 개의 집합으로 분할하는 방법
 - $n - 1$ 개의 원소를 $k - 1$ 개의 집합으로 분할한 뒤, 새로운 집합을 만들어서 n 번 원소 삽입
 - $n - 1$ 개의 원소를 k 개의 집합으로 분할한 뒤, n 번 원소를 k 개의 집합 중 한 곳에 삽입
- 따라서 $S_2(n, k) = S_2(n - 1, k - 1) + S_2(n - 1, k) \times k$

집합의 분할

벨 수

- n 개의 원소를 비어 있지 않은 집합들로 분할하는 경우의 수
 - 각 집합은 공집합이 아니고, 각 원소는 정확히 한 집합에 들어가야 함
- 정의에서 알 수 있듯이 제2종 스털링 수의 합과 같음
- $B_n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k)$
 - $B_0 = S_2(0, 0) = 1$ 이 되도록 만들기 위해 $k = 0$ 부터 시작

집합의 분할

벨 수

- n 개의 원소를 비어 있지 않은 집합들로 분할하는 경우의 수
 - 각 집합은 공집합이 아니고, 각 원소는 정확히 한 집합에 들어 가야 함
- n 번 원소가 포함된 집합의 크기가 정확히 k 가 되도록 만드는 방법
 - $n - 1$ 개의 원소 중 n 과 같은 집합에 들어갈 $k - 1$ 개의 원소를 선택한 다음
 - 나머지 $n - k$ 개의 원소를 자유롭게 분할
 - $B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} B_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$
- 따라서 $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$

집합의 분할

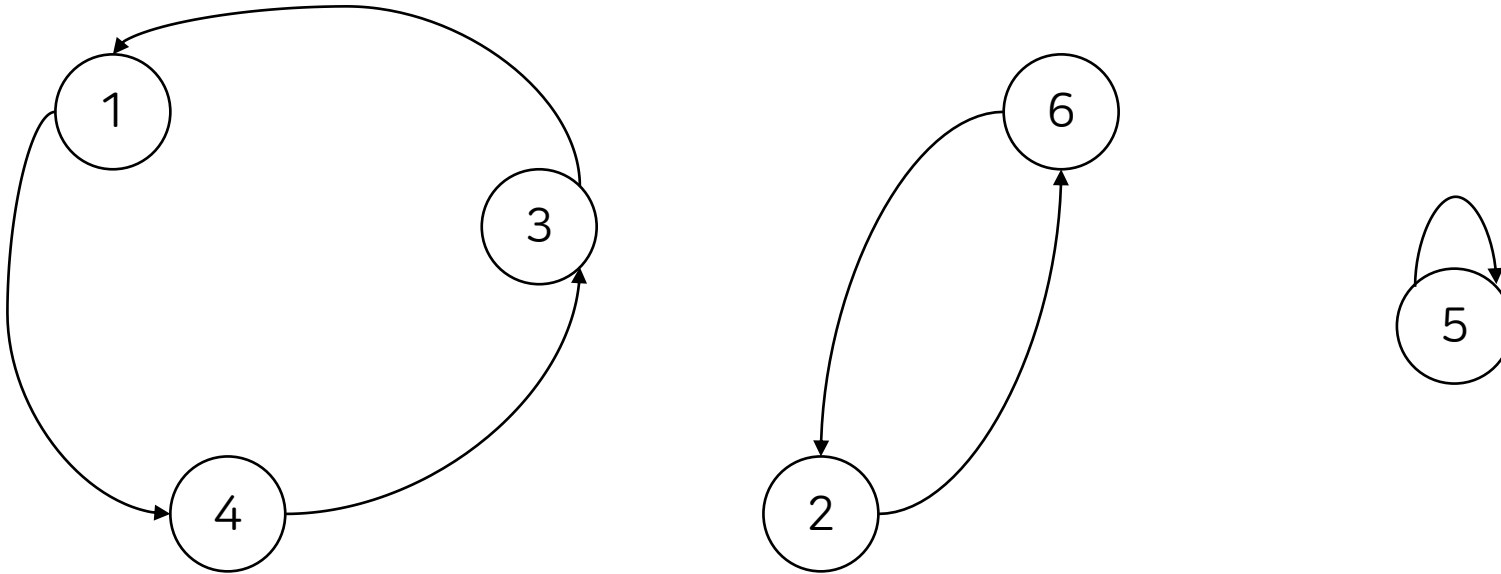
제2종 스털링 수의 일반항

- k 개의 집합을 구분하는 상황부터 생각하자.
- 처음에는 n 명의 사람을 k 개의 방에 자유롭게 집어넣는 것으로 시작
 - 즉, 공집합을 허용하고, k 개의 집합을 서로 구분하는 상황
 - 총 k^n 가지 방법이 존재함
- k^n 에서 빈 방이 1개 이상 생기는 모든 방 배정의 수를 빼면 됨
 - (r 개의 방을 빈 방으로 고정) * ($k - r$ 개의 방에 자유롭게 n 명을 배정) = $\binom{k}{r}(k - r)^n$ 을 이용해 포함 배제
- $k! S_2(n, k) = k^n + \sum_{r=1}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k - r)^n = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k - r)^n$
- $= \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{k-r} (k - r)^n = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n = (-1)^k \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} r^n$
- 따라서 $S_2(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} r^n$

집합의 분할

제1종 스털링 수

- n 개의 원소를 k 개의 **방향 있는 사이클**로 분할하는 경우의 수
- $n = 6, k = 3$



집합의 분할

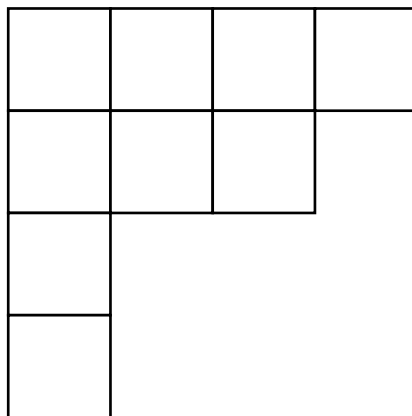
제1종 스털링 수

- n 개의 원소를 k 개의 **방향 있는 사이클**로 분할하는 경우의 수
- n 개의 원소를 이용해 k 개의 사이클을 만드는 방법
 - $n - 1$ 개의 원소로 $k - 1$ 개의 사이클을 만든 뒤, n 번 하나만 있는 사이클 생성
 - $n - 1$ 개의 원소로 k 개의 사이클을 만든 뒤, 만들어진 $n - 1$ 개의 화살표 중 하나를 골라서 사이에 n 번 삽입
- 따라서 $S_1(n, k) = S_1(n - 1, k - 1) + S_1(n - 1, k) \times (n - 1)$

자연수의 분할

영 다이어그램과 분할 수

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 가 아래 조건을 만족할 때, λ 를 n 의 자연수 분할이라고 부름
 - 모든 λ_i 는 양의 정수
 - $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$
 - $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$
 - 즉, n 을 자연수 k 개의 합으로 나타내는 방법을 중복 없이 보겠다는 뜻
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 가 주어지면, k 개의 행과 n 개의 칸으로 구성된 영 다이어그램을 만들 수 있음
 - $n = 9, \lambda = (4, 3, 1, 1)$



자연수의 분할

영 다이어그램과 분할 수

- 자연수 n 을 순서를 고려하지 않고 k 개의 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수
- 행이 k 개인 n 칸짜리 영 다이어그램을 만드는 방법
 - 마지막 행의 길이가 1인 경우
 - 행이 $k - 1$ 개인 $n - 1$ 칸짜리 영 다이어그램을 만든 뒤, 밑에 길이가 1인 행 하나 추가
 - 마지막 행의 길이가 2 이상인 경우
 - 행이 k 개인 $n - k$ 칸짜리 영 다이어그램을 만든 뒤, 각 행의 맨 앞에 한 칸씩 추가
- 따라서 $P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$

교란 순열

교란 순열

- 모든 $1 \leq i \leq n$ 에 대해, $\pi(i) \neq i$ 를 만족하는 길이 n 짜리 순열 π 의 개수
- $n = 4, D_n = 9$
 - 2 1 4 3
 - 2 3 4 1
 - 2 4 1 3
 - 3 1 4 2
 - 3 4 1 2
 - 3 4 2 1
 - 4 1 2 3
 - 4 3 1 2
 - 4 3 2 1

교란 순열

교란 순열

- 모든 $1 \leq i \leq n$ 에 대해, $\pi(i) \neq i$ 를 만족하는 길이 n 짜리 순열 π 의 개수
- $\pi(n) = n - 1$ 인 상황을 생각해 보자.
 - n 은 $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n - 2)$ 중 원하는 자리를 골라서 들어갈 수 있음
 - 만약 n 이 $\pi(n - 1)$ 에 들어간다면
 - 남은 $1, 2, \dots, n - 2$ 으로 교란 순열을 만들어서, 총 D_{n-2} 개의 교란 순열을 만들 수 있음
 - 만약 n 이 $\pi(n - 1)$ 에 들어가지 않는다면
 - n 에게 $n - 1$ 이라는 “가면”을 임시로 씌운 다음, $1, 2, \dots, n - 1$ 으로 교란 순열을 만들면 총 D_{n-1} 개를 만들 수 있음
 - 따라서 $\pi(n) = n - 1$ 인 교란 순열의 개수는 $D_{n-1} + D_{n-2}$
- $\pi(n) = 1, 2, \dots, n - 2$ 일 때도 동일한 방법으로 계산 가능
- 따라서 $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

교란 순열

교란 순열의 일반항 (1)

- $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$
- nD_{n-1} 을 왼쪽으로 넘기면 $D_n - nD_{n-1} = -D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}$
- $A_n = D_n - nD_{n-1}$ 로 정의하면 $A_n = -A_{n-1}$ 이므로 A_n 은 공비가 -1 인 등비 수열
- $A_1 = D_1 - D_0 = 0 - 1 = -1$ 이므로 $A_n = (-1)^n$
- $A_n = D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$ 에서 양변을 $n!$ 으로 나누면 $\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$
- $B_n = \frac{D_n}{n!}$ 으로 정의하면 $B_n - B_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$ 이고, $B_1 = \frac{D_1}{1!} = \frac{0}{1} = 0$
- $B_n = B_1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ 이므로 $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
- $\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 + (-1) = 0$ 이므로 $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
- 따라서 $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

교란 순열

교란 순열의 일반항 (2)

- n 개의 원소를 나열하는 $n!$ 가지 방법 중 $\pi(i) = i$ 인 i 의 개수가 k 이상인 것은 총 $\frac{n!}{k!}$ 가지
- 포함 배제의 원리를 이용하면 $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \times \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
 - 앞에서 본 것과 같은 결과
- $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ 이라는 사실도 알 수 있음
 - 이는 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ 에 $x = -1$ 을 대입한 꼴
 - 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}$
 - 즉, n 이 충분히 크면 순열을 랜덤으로 하나 선택했을 때 약 $1/e \approx 36.788\%$ 의 확률로 교란 순열

조합론의 12정도

조합론의 12정도

- n 개의 원소를 k 개의 집합으로 분할하는 방법
- 또는 n 개의 공을 k 개의 상자에 넣는 방법

동치 관계 함수 조건	조건 없음	단사 함수 (상자에 공 최대 1개)	전사 함수 (상자에 공 최소 1개)
함수 일치	k^n	$k!/(k-n)!$	$k! \times S_2(n, k)$
정의역의 순열 무시 (공 구별 X)	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{n-k}$
공역의 순열 무시 (상자 구별 X)	$\sum_{r=1}^k S_2(n, k)$	$[n \leq k]$	$S_2(n, k)$
둘 다 무시 (모두 구별 X)	$P(n+k, k)$	$[n \leq k]$	$P(n, k)$